Линеаризация и основные теоремы об устойчивости КДС

Начальные значения $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ могут соответствовать равновесному состоянию КДС. В равновесном состоянии $\dot{()} = 0$, и данные величины суть решение уравнений

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{h}_0) = 0; \quad \mathbb{F}(\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, 0) = 0,\ \mathbf{r} \in \Omega \\ &\mathbb{G}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)\Big|_S = 0; \quad \mathbf{h}_0 = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}_0) dS \end{aligned} \tag{0.1.1}$$

Здесь $\mathbf{x}_0 = Const$. Если ввести отклонения $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{h}^*$ от постоянных значений, т.е. полагать

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^*(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}^*(t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t) \\ &\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}^*(t), \quad |\,(.)^*\,| \ll 1 \end{aligned} \tag{0.1.2}$$

то уравнения движения КДС в малой окрестности состояния равновесия (символ «*» сверху для краткости опущен) принимают вид

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{x} + C\mathbf{y} + A\mathbf{h}; \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) + L_2^{(F)}\mathbf{x} + L_3^{(F)}\mathbf{y} + L_3^{(F)}\dot{\mathbf{y}},\ \mathbf{r} \in \Omega \\ &(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) + L_2^{(G)}\mathbf{y})\Big|_S = 0; \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}) dS \\ &\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0 \end{aligned} \tag{0.1.3}$$

Здесь

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{h}_0)}{\partial \mathbf{h}}, \quad B = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{h}_0)}{\partial \mathbf{x}}, \quad C = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{h}_0)}{\partial \mathbf{y}}$$

– матрицы с постоянными коэффициентами; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ – матрицы, элементы которых могут зависеть от координат $\mathbf{r}$, линейные операторы $\mathbb{L}_1^{(F)}$ и $\mathbb{L}_1^{(G)}$ соответствуют линеаризованным уравнениям движения объектов с распределенными по пространству параметрами и линеаризованным граничным условиям, а линейные операторы $\mathbb{L}^{(H)}$ переводят возмущения полей перемещений и скоростей континуальных элементов $\mathbf{u}$ в возмущения элементарных поверхностных сил и возмущения моментов элементарных поверхностных сил $\mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u})dS$ на границах раздела S. Линейной КДС (1.2.3) также соответствует структурная схема на Рис. 1.5.